
Neper (1550-1617)

Lección 2

Potencias, radicales y logarítmos

LECCIÓN 2. POTENCIAS, RADICALES, LOGARITMOS

1. Potencias de exponente entero

Recuerda la definición de potencia con exponente entero:

$$\boxed{a^n = a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a \text{ (n veces)}} \qquad \boxed{a^0 = 1} \qquad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ejemplos:

$2^3=2\cdot2\cdot2=8$ $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$ $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$ $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}$

$\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$ $\left(\frac{-1}{5}\right)^3=-\frac{1}{125}$

Si la base es una fracción y el exponente es negativo:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3}=\frac{1}{\frac{2^3}{5^3}}=\frac{5^3}{2^3}=\frac{125}{8}$$

En general:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n}}$$

Cuestiones

1) Efectúa

5^{-3} 12^2 $(-4)^2$ $(-3)^3$ $(-5)^{-2}$

$(-6)^{-2}$ 7^0 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ $\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$ $\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}$

2) Expresa en forma de potencia (a^p):

a) $\frac{1}{5^2}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{9}{121}$ e) 0,25

3) Expresa como una potencia de 10:

a) 1 b) 1000 c) 0,1 d) 0,00001 e) $\frac{1}{1000}$ f) 0,01

2. Propiedades de las potencias.

Recuerda:

$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ $\boxed{(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$ $\boxed{(a^n)^m = a^{m\cdot n}}$

Cuestiones

1. Expresa con una sola potencia:

a. $5^2\cdot 5^3$ b. $3^2\cdot 9^3$ c. $5^2\cdot 2^2$ d. $(-2)^3\cdot(-2)^4$

e. $\dfrac{5^4}{5^2}=$ f. $\dfrac{2^{10}}{2^2}=$ g. $\dfrac{6^7}{6^3}=$ h. $\dfrac{a^5}{a^2}=$

i. $(5^2)^3=$ j. $(3^3)^4=$ k. $((-2)^5)^3=$ l. $(x^2)^3=$

2. Completa los exponentes que faltan de modo que se cumpla la igualdad:

$2^5\cdot 2^3=2^{\square}$ $5^9\cdot 5^{\square}=5^7$ $3^3\cdot 3^{\square}\cdot 3^2=3^4$ $(-7)^{\square}\cdot(-7)^{\square}=(-7)^5$

3. Notación científica

En la ciencia, es común trabajar con números muy grandes y muy pequeños. Por ejemplo, el diámetro de un glóbulo rojo es 0,0065 cm, la distancia de la tierra al sol es 150.000.000 Km, y el número de moléculas en 1 g de agua es 33.400.000.000.000.000.000.000. Es engorroso trabajar con números tan largos, así que medidas como estas son generalmente escritas usando la notación científica.

En el ejemplo:

Distancia tierra-sol $150000000=1{,}5\cdot 10^8$km

Diámetro de un glóbulo rojo: $0{,}0065=6{,}5\cdot 10^{-3}$cm

En notación científica siempre debe haber un número distinto de cero (y sólo uno) delante de la coma decimal.

Ejemplos:

- En notación científica 25000 es $2{,}5\cdot 10^4$. No es correcto (aunque es lo mismo) $25\cdot 10^3$
- $23\cdot 10^{-4}$ será: $2{,}3\cdot 10^{-3}$

Cuestiones:

1) Expresa en notación ordinaria:

$3{,}1\cdot 10^1$; $3{,}1\cdot 10^2$; $3{,}1\cdot 10^3$; $3{,}1\cdot 10^4$; $3{,}1\cdot 10^8$; $3{,}1\cdot 10^{-1}$; $3{,}1\cdot 10^{-2}$; $3{,}1\cdot 10^{-3}$; $3{,}1\cdot 10^{-4}$; $3{,}1\cdot 10^{-8}$

2) Expresa en notación científica:

15000000 ; 210000 ; 1340000 ; 1200000000; 0,023 ; 0,0000062 ; 0,0000000000342

3) ¿Cuántos segundos habrás vivido cuando cumplas 18 años? Expresa el resultado en notación científica.

4) El cerebro tiene unos 14.000 millones de neuronas. Miguel lee en una revista que todos perdemos 1000 neuronas al día y se asusta. Ayúdale a tranquilizarse calculando cuantas neuronas le quedarían si llegase a vivir 100 años.

5) Escribe en notación científica los números siguientes:

a) $480 \cdot 10^5$ b) $0{,}00016 \cdot 10^{-7}$ c) $8314 \cdot 10^{-7}$ d) 0,001 e) $0{,}0000004 \cdot 10^8$

4. Raíces:

Sabemos que $\sqrt{25} = 5$ *porque* $5^2 = 25$

$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ *porque* $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

$\sqrt[3]{8} = 2$ *porque* $2^3 = 8$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \text{ si } b^n = a}$$

Cuestiones:

1) Para hallar una raíz podemos intentar descomponer el número en factores y ver si es una potencia exacta. Calcula, de esta forma, las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{343} =$ b) $\sqrt[3]{216} =$ c) $\sqrt[5]{32} =$ d) $\sqrt[4]{2401} =$

e) $\sqrt{\frac{25}{121}} =$ f) $\sqrt{a^2} =$ g) $\sqrt{b^4} =$ h) $\sqrt{9a^2} =$

i) $\sqrt[3]{8a^3} =$ j) $\sqrt[4]{16b^8} =$ k) $\sqrt[5]{1} =$ l) $\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}} =$

2) Halla con la calculadora una aproximación, con dos cifras decimales (redondea):

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{80}$ c) $\sqrt[3]{36}$ d) $\sqrt[3]{76}$ e) $\sqrt[7]{7400}$

5. Potencias de exponente fraccionario

$$\boxed{x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}}$$

Ejemplos:

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 8$ $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$

Cuestiones:

1) Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{25}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

2) Expresa en forma radical:

a) $3^{\frac{1}{6}}$ b) $2^{\frac{3}{5}}$ c) $3^{-\frac{1}{6}}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$

6. Propiedades de las raíces

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}} = \sqrt[n]{a^p}$

Estas propiedades se pueden deducir expresando las raíces en forma de potencia y aplicando las propiedades de las potencias. Por ejemplo, la última propiedad:

$$\sqrt[n\bullet m]{a^{p\bullet m}} = a^{\frac{pm}{nm}} = a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p} \qquad \sqrt[6]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{6}} = 3^2 = 9$$

Como normalmente las raíces no son exactas, trabajaremos con expresiones como $\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}+\sqrt{3}$,...

Cuestiones:

1) Efectúa, utilizando las propiedades de las raíces

a. $\sqrt[3]{2}\bullet\sqrt[3]{6}$ b. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ c. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ d. $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$

e. $\sqrt[3]{2^3}$ f. $\sqrt[5]{x^5}$ g. $\sqrt[8]{2^4}$ h. $\sqrt[6]{2^9}$

Basándonos en las propiedades de la tabla, vamos a ver cómo se opera con radicales:

1.-Simplificación de radicales:

Como hemos visto en el ejercicio anterior: $\sqrt[6]{2^9} = \sqrt{2^3}$ se dice que estos dos radicales son semejantes. Es evidente que el segundo es más simple.

2.-Reducción de radicales al mismo índice:

Ejemplo: queremos expresar $\sqrt[4]{3}\ y\ \sqrt{2}$ como dos radicales del mismo índice

Para ello hallamos el mcm de los índices mcm(4,2)=4 y aplicamos la propiedad $\sqrt[n\bullet m]{a^{p\bullet m}} = \sqrt[n]{a^p}$

$$\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{4}$$

Esta operación puede servir para ordenar radicales y para multiplicar y dividir radicales de distinto índice.

3.- Producto y cociente de radicales:

Si los radicales tienen el mismo índice aplicamos las propiedades directamente:

Ejemplos: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{2\cdot 3\cdot 5} = \sqrt{30}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\dfrac{162}{45}} = \sqrt{\dfrac{18}{5}}$

Si los radicales no tienen el mismo índice, primero se reducen al mismo índice y luego se efectúa la operación:

Ejemplos: $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{3\cdot 2^2} = \sqrt[4]{12}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{5^2}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{5^2}} = \sqrt[6]{\frac{27}{25}}$$

Cuestiones

1) Ordena de menor a mayor, reduciendo los radicales al mismo índice:
   a. $\sqrt[4]{3}\ y\ \sqrt{2}$ b. $\sqrt{2};\ \sqrt[6]{85};\sqrt[3]{16}$
2) Efectúa los siguientes productos y divisiones, simplificando el resultado cuando sea posible
   a. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$ b. $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{5}$ c. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}$ d. $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

4. Extracción de factores fuera del radical:

Primero, descomponemos los números en factores, procurando que el índice y la potencia coincidan para aplicar la propiedad $\sqrt[n]{a^n}=a$

Ejemplos: $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\cdot 2^3}=\sqrt[3]{2^3\bullet 3}=\sqrt[3]{2^3}\bullet\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{2}$ $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\sqrt{2\cdot 2^2}=2\sqrt{2}$

5.- Suma de radicales semejantes:

Sólo se pueden sumar radicales que sean semejantes (es decir, dentro de la raíz debe aparecer exactamente el mismo número). Si no es así, intentamos extraer factores del radical.

Ejemplos: $\sqrt{2}+\sqrt{3}-5\sqrt{2}+8\sqrt{3}+2\sqrt{3}=-4\sqrt{2}+11\sqrt{3}$

$$3\sqrt{24}+2\sqrt{150}-\sqrt{54}=3\sqrt{3\cdot 2^3}+2\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}-\sqrt{2\cdot 3^3}=6\sqrt{6}+10\sqrt{6}-3\sqrt{6}=13\sqrt{6}$$

Cuestiones:

1) Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{600}$ b) $\sqrt[3]{5^7}$ c) $\sqrt[5]{3^7\cdot 2^3\cdot 5^{11}}$ d) $\sqrt[3]{10^7}$ e) $\sqrt[5]{64\cdot a^6}$ =

2) Introduce el coeficiente dentro de la raíz:

a) $3\sqrt{27}$ b) $a\sqrt{a}$ c) $\dfrac{1}{5}a\sqrt{15a}$ d) $\dfrac{2y^2}{3a}\sqrt{\dfrac{a^2}{2y}}$

3) Calcula las siguientes sumas (en algunos casos, previamente tendrás que extraer factores del radical):

a) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ c) $\sqrt{99}-\sqrt{44}$ b) $\sqrt{8}-\sqrt{6}+\sqrt{18}+\sqrt{98}-\sqrt{24}$

c) $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}$ d) $3\sqrt{a}-5\sqrt{a}+\dfrac{1}{3}\sqrt{a}$

e) $3\sqrt[4]{2^8\cdot a^3}+2\sqrt[4]{5^4\cdot a^3}-\sqrt[4]{81\cdot a^3}$ f) $4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+8\sqrt{5}-\sqrt{5}+5\sqrt{5}$

4) Calcula los siguientes productos y cocientes. Extrae después todos los factores posibles:

a) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{2x}$ b) $\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}$ c) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{8}$ d) $\sqrt{24}\cdot\sqrt[3]{16}$

6. Racionalización de denominadores

A veces aparecen expresiones fraccionarias con raíces en el denominador. Racionalizar consiste en encontrar una fracción igual a la inicial pero sin raíces en el denominador- Para ello habrá que multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por la expresión adecuada.

Si en el denominador aparece una única raíz. Observa los siguientes ejemplos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{10}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{3}$$

Si en el denominador aparece una suma (a+b) o diferencia (a-b), multiplicaremos por la misma expresión pero cambiando el signo. Observa los ejemplos:

Recuerda (a+b) (a-b)=a^2-b^2

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}=\frac{3\sqrt{2}-2}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}-2}{7}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{15}-3\sqrt{6}}{5-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}-3\sqrt{6}}{-13}$$

Cuestiones:

1) Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}$ d) $\frac{1}{6\sqrt{2}}$ e) $\frac{2}{\sqrt[7]{27}}$

2) Efectúa las siguientes sumas, racionalizando previamente:

a. $\frac{10}{\sqrt{10}}-\frac{3}{7+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ b. $\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

LOGARITMOS

7. Definición de logaritmo:

Sea a un número real positivo y N otro número. Se llama **logartimo del número N en la base a**, al exponente al que hay que elevar la base (a) para obtener el número N

$$\boxed{\log_a N = x \longleftrightarrow a^x = N}$$

Ejemplos:

$\log_2 16 = 4 \;\; porque \;\; 2^4 = 16$ $\qquad \log_2 8 = 3 \;\; porque \;\; 2^3 = 8$

$\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2} \;\; porque \;\; 3^{3/2} = \sqrt{27}$ $\qquad \log_{1/2} 16 = -4 \;\; porque \;\; \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

Cuestiones:

1) Calcula aplicando la definición:

$\log_{10} 100 \qquad \log_3 9 \qquad \log_{49} \sqrt{7} \qquad \log_2 \frac{1}{16} \qquad \log_{10} 0{,}1 \qquad \log_2 64$

Se llaman **logaritmos decimales a** aquellos que tienen por base el número 10. Si la base es 10, no se pone: $\log_{10} = \log$

7. Propiedades de los logaritmos.

- Logartimo de un producto. Si M y N son números reales positivos, entonces:

$$\boxed{\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N}$$

- Logartimo de un cociente: Si M y N son números reales positivos, entonces:

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$$

- Logartimo de una potencia

$$\boxed{\log_a N^p = p \cdot \log_a N}$$

Para hallar un logaritmo que no sea exacto, utilizaremos la calculadora. Hay calculadoras que permiten calcular el resultado directamente. Otras calculadoras, solo calculan el logaritmo en base 10. En este caso, observa el siguiente proceso:

Ejempo: Vamos a calcular $\log_3 8$

x= $\log_3 8$ es lo mismo que $3^x = 8$

$$3^x = 8 \rightarrow \log 3^x = \log 8 \rightarrow x \log 3 = \log 8 \rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 3} = 1{,}89279$$

Fórmula del cambio de base.

$$\boxed{\log_a N = \frac{\log N}{\log a}}$$

Cuestiones

1) Utilizando la definición de logaritmo, calcula los siguientes:

a) $\log_2(4)$ b) $\log_2(1/2)$ c) $\log_2(\sqrt{2})$ d) $\log_3(1/27)$ e) $\log_3(81)$

f) $\log_3(\sqrt{27})$ g) $\log_3(\sqrt{27})$ h) $\log_3(\sqrt{3})$ i) $\log\ (1)$ j) $\log\ (1/1000)$

2) Halla la base en la cual el logaritmo de

a) 10000 es 2 b) 125 es 3/2 c) 16 es 2. d) 729 es 3.

3) Calcula los números x tales que:

a) $\log(x) = 0,3$ b) $\log_3(x) = 3$ c) $\log_5(x) = 2$ d) $\log_8 x = 1/3$ e) $\log_{49}\sqrt{7} = x$